230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportements des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I] Séries réelles et complexes

1] Notion de série et convergence

II.1 [El Am]

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite réelle ou complexe.

Définition 1 : On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$. On dit que $\sum u_n$ converge si $S_n \xrightarrow[+\infty]{} S$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ cette limite appelée somme.

Exemple 2 : Soit $a \in \mathbb{C}$ telle que $|a| < 1$. Alors $\sum a^n$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Définition 3 : Si $\sum u_n$ est convergente de somme S. On appelle reste d'ordre n : $R_n := S - S_n$

Proposition 4 : L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 5 : Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Contrexemple 6 : La réciproque est fausse. $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ diverge mais $\ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Théorème 7 : (critère de Cauchy) Une série numérique $\sum u_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon$.

Exemple 8 : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge car ne vérifie pas le critère de Cauchy.

Définition 9 : Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 10 : Toute série absolument convergente est convergente.

Contrexemple 11 : La réciproque est fausse. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge simplement mais pas absolument.

2] Cas particulier des séries à termes positifs

II.2 [El Am]

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

Lemme 12 : $\sum u_n$ converge ssi (S_n) est majorée

Théorème 13 : (règle de comparaison) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors : (1) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et $\sum^{+\infty} u_n \leq \sum^{+\infty} v_n$

(2) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.

Exemple 14 : $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ aussi.

Théorème 15 : (règle d'équivalence) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors : (1) Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

(2) Si l'une converge, alors $R_n^u \underset{+\infty}{\sim} R_n^v$

(3) Si l'une diverge, alors $S_n^u \underset{+\infty}{\sim} S_n^v$

Théorème 16 : (règles de domination) Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ (resp. $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$) Alors : si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et on a : $R_n^u \underset{+\infty}{=} O(R_n^v)$ (resp. $R_n^u \underset{+\infty}{=} o(R_n^v)$)

Théorème 17 : (comparaison série-intégrale) Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a ; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ décroissante. Alors : $\sum_{n \geq a} f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, alors $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$

Application 18 : (séries de Bertrand) La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

3] Règles et critères de convergence

II.3 [El Am]

Théorème 19 : (critère de Cauchy) Soit $L = \limsup \sqrt[n]{|u_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Alors : (1) Si $L < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument

(2) Si $L > 1$, alors $\sum u_n$ diverge

Exemple 20 : Pour $(u_n) = ((1-\frac{1}{n})^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum (1-\frac{1}{n})^{n^2}$ converge

II.3 [ElAm]

Théorème 21 : (de D'Alembert) Si $\ell := \lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe.
Alors : (1) Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente
(2) Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 22 : $\sum \frac{a^n}{n}$ converge si $0<a<1$ et diverge si $a>1$.

Remarque 23 : Si $\ell = 1$, alors on ne peut, en général, rien dire. En effet, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Proposition 24 : Si $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,
Alors : $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite.

II) Étude de séries particulières

1) Séries alternées

II.4 [ElAm]

Définition 25 : On appelle série alternée toute série de terme général $(-1)^n a_n$ avec $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de signe constant.

Théorème 26 : (critère de Leibniz) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que (a_n) est décroissante et $a_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
Alors : $\sum (-1)^n a_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $|R_n| \leq a_{n+1}$

Exemple 27 : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum (-1)^{n-1} n^{-x}$ est alternée avec $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ décroissant vers 0 d'où : $\sum (-1)^{n-1} n^{-x}$ converge et $\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$

Contre-exemple 28 : L'hypothèse de décroissance est vitale.
Pour $\left(a_n := \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ mais $\sum (-1)^n a_n$ diverge.

2) Transformation d'Abel

VII.1.pb7.3 [ElAm]

Définition 29 : Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q \geq p+1$, $\sigma_{p,q} := \sum_{k=p+1}^{q} v_k$.
Effectuer une transformation d'Abel sur $(u_n v_n)$ c'est-à-dire :

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = u_q \sigma_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) \sigma_{p,k}$$
$$= u_{p+1} v_{p+1} + \sum_{k=p+2}^{q} u_k (\sigma_{p,k} - \sigma_{p,k+1})$$

VII.1.pb7.3 [ElAm]

Théorème 30 : (d'Abel) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0, $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\exists M > 0 \setminus \forall p,q \in \mathbb{N}$, $q \geq p+1 \Rightarrow \left|\sum_{k=p+1}^{q} v_k\right| \leq M$.
Alors : $\sum u_n v_n$ est convergente

Exemple 31 : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$, $\sum \frac{e^{int}}{n^x}$ converge.

3) Séries entières

V.1 [ElAm]

Définition 32 : On appelle série entière toute série de fonctions $\sum a_n z^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Lemme 33 : (d'Abel) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $(a_n z_0^n)$ est bornée.
Alors : $\forall z \in D(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument

Définition 34 : On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$:
$R := \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Théorème 35 : Soit R rayon de convergence de $\sum a_n z^n$
Alors : (1) Si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument
(2) Si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.

Théorème 36 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $\mathcal{A}(\Omega)$ fonctions analytiques sur Ω
Alors : $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$ i.e. les fonctions holomorphes sur Ω sont analytiques sur Ω et vice-versa.

[FGN An2]

Application 37 : (partition d'un entier à parts fixées) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ premiers entre eux et soit $(u_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que :
$\left(u_n := \mathrm{card}\left(\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \times \dots \times a_k} \times \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

III] Utilisation des séries de Fourier

1] Coefficients de Fourier et résultats fondamentaux.

VI [El Am]

<u>Définition 38</u>: Soit $f \in \mathcal{C}_m$, 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier exponentiels : $\left(c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ et on appelle coefficients de Fourier trigonométriques : $\left(a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On appelle série de Fourier de f :

$$S(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)$$

<u>Théorème 39</u>: (de Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_m$, 2π-périodique

<u>Alors</u> : $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

<u>Lemme 40</u>: (de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in \mathcal{C}_m([a;b])$.

<u>Alors</u> : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}\,dx = 0$

<u>Théorème 41</u>: (de Dirichlet) Soit $f \in \mathcal{C}^1_m$, 2π-périodique.

<u>Alors</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = S(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$

2] Utilisation en résolution d'EDP et en calcul d'intégrales

[Isen]

<u>Application 42</u>: (résolution de l'équation de la chaleur) Soit $u_0 \in L^2([0;2\pi])$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $d_n := c_n(f)$ coefficients de Fourier.

<u>Alors</u> : $\exists!\, u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $\forall t > 0$ fixé, $u(t,\cdot)$ est 2π-périodique

(2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

(3) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (équation de la chaleur)

(4) $u(t,\cdot)$ converge en norme L^2 vers u_0 lorsque $t \to 0$.

[Les]

<u>Application 43</u>: Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ sont convergentes et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Références :

[El Am] Suites et séries numériques / de fonctions - El Amrani

[FGN An2] Exercices de mathématiques Oraux X-ENS Analyse 2 - Francinou

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre